Olympiade Francophone de Mathématiques

Cinquième édition

23 mars 2024

Épreuve Junior

Les problèmes *ne* sont *pas* classés par ordre de difficulté

Problème 1

Trouver le plus grand entier k possédant la propriété suivante : quels que soient les réels $x_1, x_2, \ldots, x_{2024}$ tels que

$$x_1^2 = (x_1 + x_2)^2 = \cdots = (x_1 + x_2 + \cdots + x_{2024})^2,$$

il en existe au moins k qui sont tous égaux.

Problème 2

Étant donnés $n \geqslant 2$ points sur un cercle, Alice et Bob jouent au jeu suivant. Initialement, un pion est placé sur l'un de ces points et aucun segment n'est tracé.

Les joueurs jouent chacun à leur tour, en commençant par Alice. Chaque joueur, lorsque c'est à son tour de jouer, déplace le pion du point sur lequel il se trouve, disons P, vers un des $n-1$ autres points, disons Q, puis trace le segment $[PQ]$. Ce déplacement n'est toutefois autorisé que si le segment $[PQ]$ n'avait pas déjà été tracé auparavant. Le premier joueur qui ne peut plus déplacer le pion perd la partie, et son adversaire gagne.

Déterminer, pour chaque n, lequel des deux joueurs peut s'assurer de gagner quels que soient les choix de son adversaire.

Problème 3

Soit ABC un triangle dont tous les angles sont aigus et tel que $AB < AC$, et soit O le centre de son cercle circonscrit. Soit D le point de $[AC]$ tel que $AB = AD$. On note E le point d'intersection de la droite (AB) avec la perpendiculaire à (AO) passant par D. Soit F le point d'intersection de la droite perpendiculaire à (OC) passant par C et de la droite parallèle à (AC) passant par E. Enfin, le point d'intersection des droites (CE) et (DF) est noté G. Prouver que (AG) et (BF) sont parallèles.

Problème 4

Trouver tous les entiers $n \geqslant 2$ pour lesquels il existe n entiers $a_1, a_2, \ldots, a_n$ supérieurs ou égaux à 2 et tels que, pour tous les indices i et j distincts l'un de l'autre, l'entier a_i divise $a_j^2 + 1$.

Durée de l'épreuve : 4 heures et 30 minutes

Chaque problème est noté sur 7 points