Olympiade Francophone de Mathématiques
Cinquième édition
23 mars 2024

Épreuve Junior : Solutions

Problème 1

Trouver le plus grand entier k possédant la propriété suivante : quels que soient les réels $x_1, x_2, \ldots, x_{2024}$ tels que

$$x_1^2 = (x_1 + x_2)^2 = \cdots = (x_1 + x_2 + \cdots + x_{2024})^2,$$

il en existe au moins k qui sont tous égaux.

Solution

Tout d'abord, notons que si $x_1 = 1$, $x_{2k} = -2$ pour $k \in \{1, \ldots, 675\}$, $x_{2k+1} = 2$ pour $k \in \{1, \ldots, 675\}$ et $x_k = 0$ pour $k \in \{1352, \ldots, 2024\}$, on vérifie que chacune des sommes vaut ± 1, et qu'il n'y a pas 676 réels tous égaux. Ainsi, $k \leqslant 675$.

Montrons désormais qu'étant donnés 2024 réels vérifiant la propriété, on peut toujours en trouver 675 qui sont tous égaux.

Notons, pour tout $k \in \{1, \ldots, 2024\}$, $s_k = x_1 + \cdots + x_k$. Alors, pour tout tel k, on a $|s_k| = |x_1|$. En particulier, les nombres s_k ne peuvent prendre qu'au plus deux valeurs possibles, à savoir x_1 et $-x_1$.

On en déduit que pour tout $k \in \{2, \ldots, 2024\}$, $x_k = s_k - s_{k-1}$ ne peut prendre qu'au plus trois valeurs possibles, à savoir $-2x_1$, 0 ou $2x_1$. Mais alors, par le principe des tiroirs, il existe une de ces valeurs qui est prise par au moins $\lceil \frac{2023}{3} \rceil = 675$ réels.

Problème 2

Étant donnés $n \geqslant 2$ points sur un cercle, Alice et Bob jouent au jeu suivant. Initialement, un pion est placé sur l'un de ces points et aucun segment n'est tracé.

Les joueurs jouent chacun à leur tour, en commençant par Alice. Chaque joueur, lorsque c'est à son tour de jouer, déplace le pion du point sur lequel il se trouve, disons P, vers un des $n-1$ autres points, disons Q, puis trace le segment $[PQ]$. Ce déplacement n'est toutefois autorisé que si le segment $[PQ]$ n'avait pas déjà été tracé auparavant. Le premier joueur qui ne peut plus déplacer le pion perd la partie, et son adversaire gagne.

Déterminer, pour chaque n, lequel des deux joueurs peut s'assurer de gagner quels que soient les choix de son adversaire.

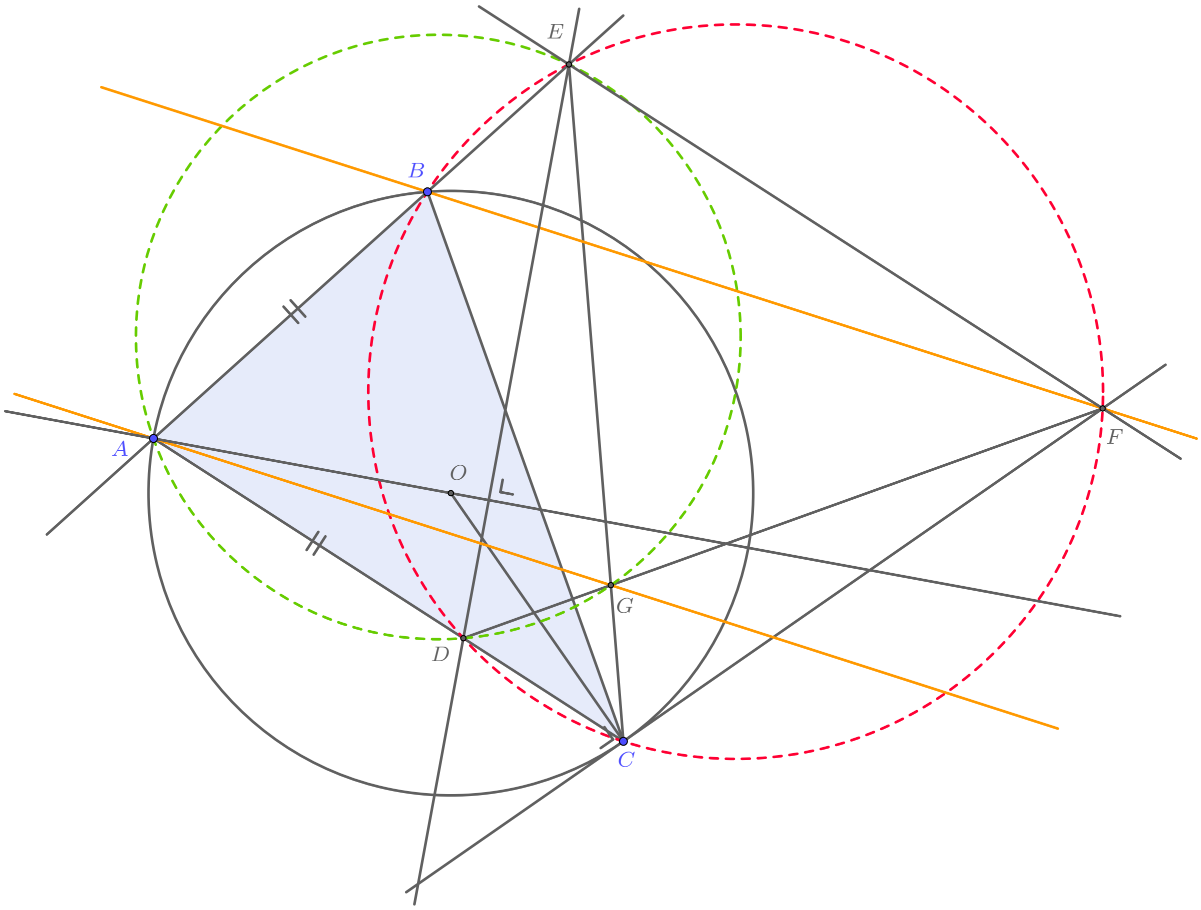
Solution

Alice a une stratégie gagnante quel que soit n. Soient S le point de départ du pion et P un autre point parmi les $n-1$ restants. Le premier coup, Alice choisit de bouger le pion de S vers P. Après ce coup, $[SP]$ est donc tracé. À chaque coup, Bob doit faire un coup de S à X (premier cas) ou de P à X (deuxième cas) pour un point X pas encore visité (voir plus loin). Alice réagit alors en revenant à P dans le premier cas, ou en revenant à S dans le deuxième cas. Ainsi, à la fin de chaque tour d'Alice, le pion est sur S ou P et pour chaque autre point Y, soit $[SY]$ et $[PY]$ sont tous les deux tracés, soit il ne le sont ni l'un ni l'autre. À son tour de jeu, Bob est donc obligé de visiter un nouveau point à partir de S ou P, et Alice pourra toujours jouer son coup de revenir en P ou S respectivement. Alice ne peut donc pas perdre la partie. Vu qu'il y a un nombre fini de segments possibles à tracer, la partie se terminera à un moment donné, et c'est donc bien Bob qui perdra.

Problème 3

Soit ABC un triangle dont tous les angles sont aigus et tel que $AB < AC$, et soit O le centre de son cercle circonscrit. Soit D le point de $[AC]$ tel que $AB = AD$. On note E le point d'intersection de la droite (AB) avec la perpendiculaire à (AO) passant par D. Soit F le point d'intersection de la droite perpendiculaire à (OC) passant par C et de la droite parallèle à (AC) passant par E. Enfin, le point d'intersection des droites (CE) et (DF) est noté G. Prouver que (AG) et (BF) sont parallèles.

Solution



Comme $(AO) \perp (DE)$, on a $\widehat{ADE} = 90° - \widehat{OAD} = 90° - \widehat{OAC} = \frac{\widehat{AOC}}{2} = \widehat{ABC}$. On en déduit que $\widehat{CDE} = \widehat{EBC}$ et donc que le quadrilatère $EBDC$ est cyclique.

Comme $(CF) \perp (CO)$, (CF) est la tangente en C au cercle circonscrit à ABC. Dès lors, $\widehat{BCF} = \widehat{BAC}$. Vu que (AC) est parallèle à (EF), on a que $\widehat{BEF} = \widehat{AEF} = 180° - \widehat{EAC} = 180° - \widehat{BAC} = 180° - \widehat{BCF}$. On en déduit que le quadrilatère $BCFE$ est cyclique et donc le pentagone $BDCFE$ est lui aussi cyclique.

Comme $\widehat{ADE} = \widehat{ABC}$, $\widehat{DAE} = \widehat{BAC}$ et $AD = AB$, nous savons que les triangles ADE et ABC sont isométriques. En particulier, $AE = AC$ et le triangle EAC est isocèle en A.

Par ailleurs, le quadrilatère $EFCD$ est cyclique avec EF parallèle à CD : c'est une trapèze isocèle. En particulier, le triangle DGC est isocèle en G. Puisque $\widehat{DCG} = \widehat{ACE}$, il vient que les triangles isocèles EAC et DGC sont semblables, d'où $\widehat{EAC} = \widehat{DGC}$. On a donc $\widehat{EGD} = 180° - \widehat{DGC} = 180° - \widehat{EAC} = 180° - \widehat{EAD}$, ce qui montre que $EADG$ est cyclique.

Nous pouvons conclure en calculant

$$\widehat{EAG} = \widehat{EDG} = \widehat{EDF} = \widehat{EBF},$$

ce qui montre bien que (BF) est parallèle à (AG).

Problème 4

Trouver tous les entiers $n \geqslant 2$ pour lesquels il existe n entiers $a_1, a_2, \ldots, a_n$ supérieurs ou égaux à 2 et tels que, pour tous les indices i et j distincts l'un de l'autre, l'entier a_i divise $a_j^2 + 1$.

Solution

Notons tout d'abord que $n = 2$ est solution car les entiers $a_1 = 2$ et $a_2 = 5$ satisfont la condition de l'énoncé. Nous allons montrer que c'est la seule solution.

Considérons désormais un entier n solution. Si i et j sont deux indices distincts, alors la relation de divisibilité implique que a_i et a_j sont premiers entre eux. En particulier, puisqu'ils sont supérieurs ou égaux à 2, les entiers sont deux à deux distincts, et quitte à les renuméroter, on peut supposer que $a_1 < \cdots < a_n$.

Supposons désormais que $n \geqslant 3$. Puisque a_n et a_{n-1} sont premiers entre eux, on a $a_n a_{n-1}$ qui divise $a_1^2 + 1$, ce qui implique

$$a_1^2 + 1 \geqslant a_n a_{n-1} \geqslant (a_{n-1} + 1) a_{n-1} = a_{n-1}^2 + a_{n-1} > a_1^2 + 1.$$

Ceci nous donne la contradiction désirée. La seule solution est donc bien $n = 2$.