Olympiade Francophone de Mathématiques

Cinquième édition

23 mars 2024

Épreuve Senior : Solutions

Problème 1

Soient d et m deux entiers strictement positifs fixés. Pinocchio et Geppetto connaissent les valeurs de d et m, et jouent au jeu suivant. Tout d'abord, Pinocchio choisit un polynôme P de degré au plus d à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Ensuite, Geppetto lui pose des questions de la forme « Quelle est la valeur de $P(n)$? », où $n \in \mathbb{Z}$. Pinocchio dit habituellement la vérité, mais il peut mentir jusqu'à m fois. Quel est, en fonction de d et m, le nombre minimal de questions que Geppetto devra poser pour être sûr de pouvoir déterminer P quelles que soient les réponses de Pinocchio ?

Remarque : $\mathbb{Z}$ désigne l'ensemble des entiers, quel que soit leur signe.

Solution

Le nombre minimal recherché est $2m + d + 1$.

Montrons d'abord que Geppetto peut trouver P avec $2m + d + 1$ questions. Geppetto demande à Pinocchio la valeur de $P(t)$ pour $2m + d + 1$ valeurs entières distinctes. Supposons par l'absurde qu'il existe deux polynômes distincts $P_1, P_2 \in \mathbb{Z}[x]$ de degré au plus d qui, chacun, ne passe pas par maximum m points $(t, P(t))$ donnés par Pinocchio. Il existe donc au moins $d+1$ de ces points par lesquels passent par P_1 et P_2. Vu que ce sont deux polynômes de degré au plus d, cela implique que $P_1 = P_2$, d'où la contradiction voulue. Geppetto peut déterminer le polynôme P en essayant les $\binom{2m+d+1}{d+1}$ $(d+1)$-uples de points et, pour chacun d'entre eux, en calculant l'unique polynôme qui passe par ces points (polynôme de Lagrange) et en vérifiant qu'il passe bien par au moins $m + d + 1$ de ces points.

Supposons maintenant que Geppetto puisse trouver le polynôme en posant seulement $2m + d$ questions. Dans ce cas, Pinocchio choisit un polynôme P de degré au plus d dans $\mathbb{Z}[x]$ (par exemple x^d). Il répond ensuite honnêtement aux d premières questions de Geppetto, et lui indique donc que P passe par les points $(a_1, P(a_1))$, ..., $(a_d, P(a_d))$. À ce stade, P est une potentielle solution pour Geppetto, mais aussi $Q = P + \prod_{i=1}^{d}(x - a_i)$. Pinocchio répond ensuite honnêtement aux m questions suivantes, et répond comme si le polynôme choisi était Q aux m dernières questions. Les deux polynômes P et Q sont donc valables aux yeux de Geppetto et il ne peut pas choisir le bon à coup sûr.

Problème 2

Étant donné un entier $n \geqslant 2$, soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux ensembles chacun formé de n points de l'espace à trois dimensions. On suppose que les $2n$ points ainsi obtenus sont tous distincts. Démontrer que l'on peut ordonner les points de $\mathcal{P}$ en une liste $P_1, P_2, \ldots, P_n$, et les points de $\mathcal{Q}$ en une liste $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ de manière à ce que, pour tous les indices i et j, les boules de diamètres $[P_i\, Q_i]$ et $[P_j\, Q_j]$ aient au moins un point commun.

Remarque : La boule de diamètre $[PQ]$ est l'ensemble des points situés sur la sphère de diamètre $[PQ]$ et des points situés à l'intérieur de celle-ci.

Solution

La boule de diamètre $[AX]$ a pour centre $\frac{A+X}{2}$ et rayon $\frac{\|A-X\|}{2}$. Cette boule intersecte la boule de diamètre $[BY]$ si et seulement si la distance entre leurs centres est plus petite ou égale à la somme de leurs rayons, c'est à dire

$$\frac{\|A+X-B-Y\|}{2} \leqslant \frac{\|A-X\|}{2} + \frac{\|B-Y\|}{2}$$

ou encore

$$\|A+X-B-Y\| \leqslant \|A-X\| + \|B-Y\|.$$

Si ceci n'est pas le cas, par l'inégalité triangulaire, on obtient

$$\|A-Y\| + \|B-X\| \geqslant \|A+X-B-Y\| > \|A-X\| + \|B-Y\|.$$

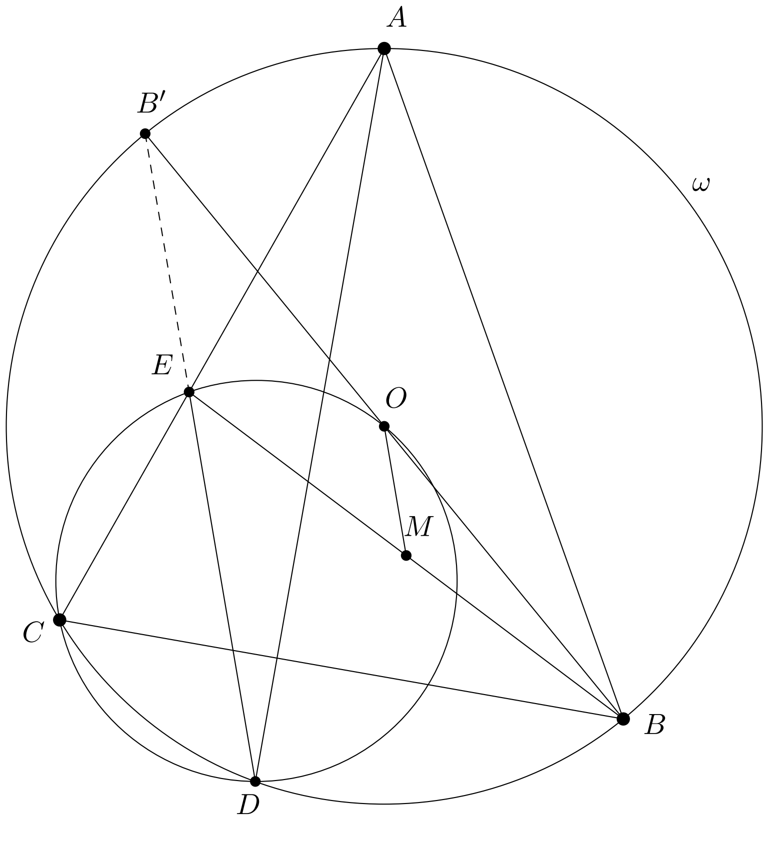
Considérons une numérotation de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ qui maximise $\sum_{i=1}^{n} \|P_i - Q_i\|$. Fixons maintenant deux indices $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$. Si les boules de diamètres $[P_iQ_i]$ et $[P_jQ_j]$ ne s'intersectaient pas, nous devrions avoir $\|P_i - Q_j\| + \|P_j - Q_i\| > \|P_i - Q_i\| + \|P_j - Q_j\|$, ce qui contredirait la définition de la numérotation choisie.

Problème 3

Soient ABC un triangle dont tous les angles sont aigus, ω son cercle circonscrit, et O le centre de ω. La hauteur de ABC issue de A recoupe ω en un point D distinct de A, et le segment $[AC]$ recoupe le cercle circonscrit à OCD en un point E distinct de C. Enfin, on note M le milieu du segment $[BE]$. Démontrer que (DE) est parallèle à (OM).

Solution 1

Soit B' le symétrique de B par rapport à O. Puisque O est le milieu de $[BB']$ et M est le milieu de $[BE]$, nous savons que $(OM)//(B'E)$. Il suffit donc de montrer que B', E et D sont alignés.



En utilisant les angles inscrits dans ω, nous savons que

$$\widehat{CDB'} = \widehat{CAB'} = \widehat{BAB'} - \widehat{BAC} = 90° - \widehat{BAC}.$$

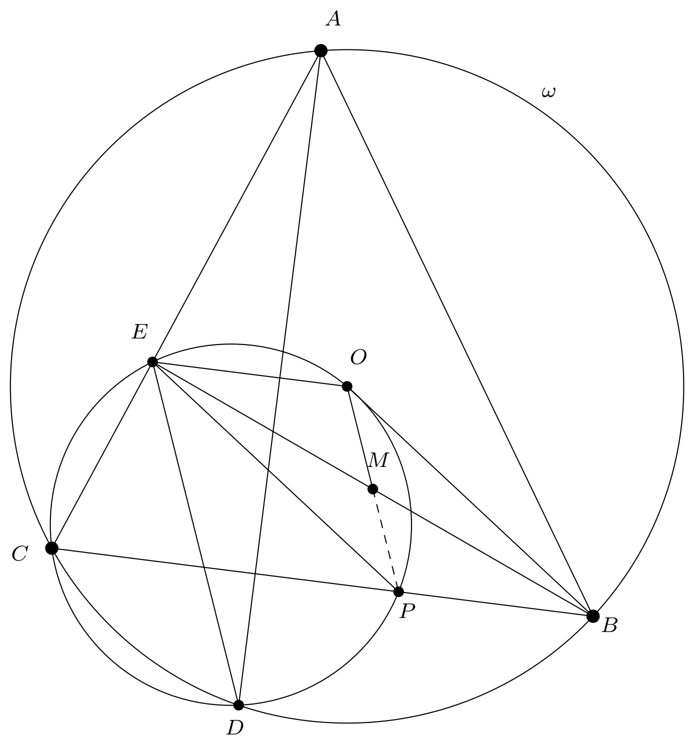
De plus, en utilisant les angles inscrits dans le cercle $CEOD$ et les angles inscrits et au centre dans ω, nous avons

$$\begin{aligned}\widehat{CDE} &= 180° - \widehat{DEC} - \widehat{ACD}\\ &= 180° - \widehat{DOC} - \widehat{ACB} - \widehat{BCD}\\ &= 180° - 2\widehat{DAC} - \widehat{ACB} - \widehat{BAD}\\ &= 180° - 2(90° - \widehat{ACB}) - \widehat{ACB} - (90° - \widehat{ABC})\\ &= \widehat{ACB} - 90° + \widehat{ABC}\\ &= 90° - \widehat{BAC}.\end{aligned}$$

Cela montre que $\widehat{CDB'} = \widehat{CDE}$ et donc D, E et B' sont alignés.

Solution 2

Soit P le deuxième point d'intersection du cercle OCD avec (BC).



On peut calculer

$$\widehat{DOP} = \widehat{DCP} = \widehat{DCB} = \widehat{DAB} = 90° - \widehat{ABC} = 90° - \frac{\widehat{AOC}}{2} = \widehat{OCA} = \widehat{OCE} = \widehat{ODE}$$

ce qui montre que $(DE)//(OP)$. Il reste donc à montrer que $M \in (OP)$.

Comme dans la solution 1, nous pouvons montrer que $\widehat{CDE} = 90° - \widehat{BAC}$. Dès lors,

$$\widehat{CPE} = \widehat{CDE} = 90° - \widehat{BAC} = 90° - \frac{\widehat{BOC}}{2} = \widehat{OBC}$$

prouvant que $(PE)//(OB)$.

Puisque le triangle COD est isocèle, nous savons que

$$\widehat{AEO} = 180° - \widehat{CEO} = \widehat{CDO} = \frac{180° - \widehat{COD}}{2} = 90° - \frac{\widehat{COD}}{2} = 90° - \widehat{CAD} = \widehat{ACB}$$

ce qui prouve que $(EO)//(BC)$. Le quadrilatère $EOBP$ est donc un parallélogramme. Le milieu M de sa diagonale $[EB]$ est donc sur l'autre diagonale $[OP]$, concluant la preuve.

Solution 3

On montre que

$$\widehat{EDB} = \widehat{EDO} + \widehat{ODB} = \widehat{ECO} + 90° - \widehat{DAB} = 90° - \widehat{ABC} + 90° - (90° - \widehat{ABC}) = 90°.$$

Comme M est le milieu de $[EB]$, il est le milieu de l'hypoténuse du triangle rectangle EDB. Dès lors, $MB = MD$. De plus, comme O est le centre de ω, on a $OB = OD$. Ceci montre que OM est la médiatrice de $[BD]$, ce qui implique $(OM) \perp (BD)$. Comme $(DE) \perp (BD)$, on a $(DE)//(OM)$.

Problème 4

Soit p un nombre premier fixé. Trouver tous les entiers $n \geqslant 1$ satisfaisant la propriété suivante : On peut regrouper les diviseurs positifs de n deux par deux de manière à ce que, pour chaque couple (d, d') ainsi formé, les deux conditions suivantes soient satisfaites :

- $d < d'$;
- p divise $\lfloor \frac{d'}{d} \rfloor$.

Remarque : On rappelle que, lorsque x est un réel, la notation $\lfloor x \rfloor$ désigne le plus grand entier inférieur ou égal à x. Par exemple, $\lfloor 3 \rfloor = \lfloor \pi \rfloor = \lfloor 3{,}99 \rfloor = 3$.

Solution

Appelons un entier $n > 0$ "bon" s'il a la propriété de l'énoncé. Clairement, si p ne divise pas n, alors n ne peut pas être bon car 1 ne peut être apparié avec aucun autre diviseur. De plus, si n est un carré parfait, il a un nombre impair de diviseurs et ne peut donc pas être bon.

Réciproquement, montrons que si n est divisible par p mais n'est pas un carré parfait, alors il est bon. On note $s = \nu_p(n) \geqslant 1$ la valuation p-adique de n.

Si s est impair, on pose $s = 2v + 1$. Si $a_1, \ldots, a_k$ sont les diviseurs de $\frac{n}{p^s}$, alors les diviseurs de n de la forme $p^x a_u$ où $0 \leqslant x \leqslant s$ et $1 \leqslant u \leqslant k$. On peut alors les apparier comme suit : $(p^{2i} a_u, p^{2i+1} a_u)$ avec $0 \leqslant i \leqslant v$ et $1 \leqslant u \leqslant k$.

Si s est pair, comme n n'est pas un carré parfait, il existe un nombre premier $q \neq p$ tel que $t = \nu_q(n) \geqslant 1$ est impair. On note $s = 2v$ et $t = 2w + 1$. Les diviseurs de n sont de la forme $p^x q^y d$ où $0 \leqslant x \leqslant s$, $0 \leqslant y \leqslant t$ et d est un diviseur de $\frac{n}{p^s q^t}$. Pour chaque tel d, on peut alors les apparier comme suit :

- $(p^{2i-1} q^{2j} d, p^{2i} q^{2j} d)$ avec $1 \leqslant i \leqslant v$ et $0 \leqslant j \leqslant w$;
- $(p^{2i} q^{2j+1} d, p^{2i+1} q^{2j+1} d)$ avec $0 \leqslant i \leqslant v - 1$ et $0 \leqslant j \leqslant w$;
- $(q^{2j} d, p^s q^{2j+1} d)$ avec $0 \leqslant j \leqslant w$.